

# Wiskunde in hoofdrol van veelzijdige opdracht

**Wiskundige modellen, bijvoorbeeld van het hart of van de bloedvaten, kunnen artsen helpen om nauwkeurige diagnoses te stellen. Je hebt daarvoor kennis nodig over de eigenschappen van bloedvaten en spieren. Hoe meet je die eigenschappen en hoe nauwkeurig zijn je metingen? En hoe beïnvloeden je meetfouten de voorspellingen uit je model? De BMT-studenten (biomedische technologie) aan de Technische Universiteit Eindhoven gaan al vroeg in hun studie met deze vragen aan de slag. Eenvoudige wiskunde helpt ze daarbij.**



Peter Bovendeerd



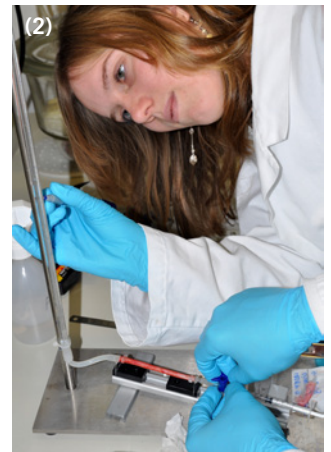
Koo Rijpkema

We zijn te gast bij Peter Bovendeerd en Koo Rijpkema, docenten aan respectievelijk de faculteiten Biomedische Technologie en Wiskunde & Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Samen ontwikkelden zij de casus 'Mechanica van een bloedvat' waarbij eerstejaarsstudenten hun eerste metingen aan echt vaatmateriaal doen. Best spannend, werken met echte bloedvaten. De boodschap is dan ook: goed ontbijten. De kans dat je flauwvalt is zo een stuk kleiner.

## Formules en statistiek

De opdracht heet een casus omdat het veel verder gaat dan een voorgeprogrammeerde proef. Het wordt de studenten niet makkelijk gemaakt. "We geven met opzet een summere omschrijving", vertelt Bovendeerd. "Ze moeten een uitspraak doen over de toestand van een vaatwand. Wat je daarover zou kunnen zeggen, moeten ze zelf onderzoeken. Ze moeten bovendien iets zeggen over de nauwkeurigheid van hun uitspraken. Statistiek helpt daarbij en is een onderdeel van de opdracht."

In groepen van acht, onderwijsgroepen genaamd, gaan de studenten met de opdracht aan de slag. Ze doen dit volgens een typische ingenieursaanpak: een combinatie van theoretische modellen en experimentele data. Eerder in het curriculum hebben de studenten in het college 'Fysica' al gezien dat de elasticiteitsmodulus een belangrijke parameter is. Die moeten ze dus meten. "Voor het verzamelen van experimentele data, moeten de groepen zelf drie meetmethodes bedenken en uitvoeren", licht Bovendeerd toe. "Eerst voeren ze de metingen uit aan een stuk siliconenslang, daarna doen ze dezelfde metingen nog een keer, maar dan aan een stukje echt bloedvat. Ze ervaren daarbij hoeveel moeilijker dat laatste is. Meestal komen alle onderwijsgroepen op dezelfde drie meetmethodes uit: een trekproef, een drukmeting en een proef waarbij de voortplantingssnelheid van een drukgolf wordt gemeten."



*Het verzamelen van experimentele data: (1) trekproef met een siliconenslang, (2) drukmeting met een echt bloedvat en (3) meting van de voortplantingssnelheid van een drukgolf in een siliconenslang*

In de theorie vinden de studenten de wiskundige formules waarmee ze de elasticiteitsmodulus kunnen berekenen. Daarnaast speelt statistische modellering een belangrijke rol. “Met deze casus willen we studenten bewust maken van hoe je een experiment inricht en hoe nauwkeurig je metingen zijn”, vertelt Rijpkema. “Voor het uitvoeren van de experimenten krijgen ze maar een beperkte hoeveelheid materiaal en betrekkelijk eenvoudige hulpmiddelen zoals een rolmaat en een stopwatch. Hiermee moeten ze het doen.”

### Wat vertellen de fouten?

Hoe meet je binnen een beperkte tijd en met beperkte middelen zo goed mogelijk de elasticiteitsmodulus? Hoe vaak herhaal je een meting? Meet je 10 keer de uitrekking bij een belasting met steeds dezelfde massa? Meet je 5 keer bij 2 verschillende massa's? Of 2 keer bij 5 verschillende massa's? Rijpkema: “De groepjes moeten een meetprotocol opstellen en beargumenteren waarom ze voor een bepaald aantal herhalingen kiezen. Heeft het zin om een meting honderd keer te herhalen? Wordt het er nauwkeuriger van? Hoe herken je systematische fouten? Wat kun je zeggen over toevallige fouten?”

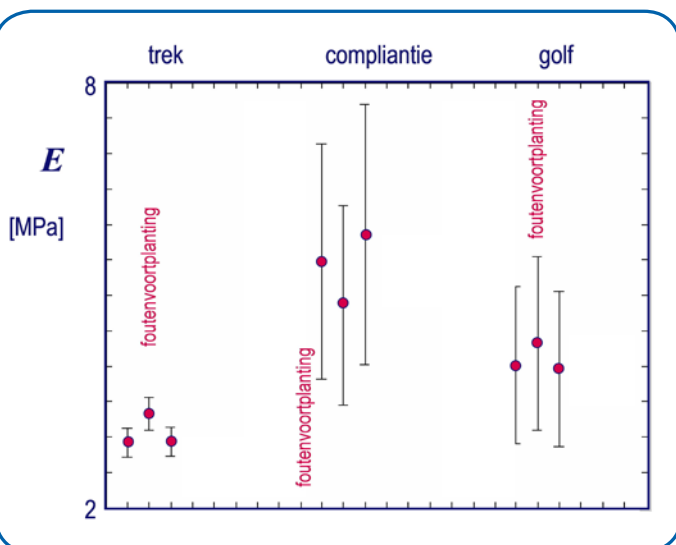
De toegepaste regels over foutenvoortplanting zijn eenvoudig: bij de som of het verschil van twee onafhankelijke grootheden,  $a$  en  $b$ , tellen de absolute fouten,  $\Delta a$  en  $\Delta b$  op, bij het product of de verhouding van de twee zijn het de relatieve fouten,  $\Delta a/a$  en  $\Delta b/b$ :

$$y = a + b \Rightarrow \Delta y = \Delta a + \Delta b \quad \text{en} \quad y = a - b \Rightarrow \Delta y = \Delta a + \Delta b$$

$$y = a \cdot b \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad \text{en} \quad y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$y = C \cdot a \Rightarrow \Delta y = C \cdot \Delta a$$

Hoe nauwkeurig kun je – met de gegeven middelen – de elasticiteitsmodulus  $E$  meten? Hieronder de resultaten van een van de groepen.



Analyseresultaten van een onderwijsgroep

## “Als onderzoeker heb je een open houding nodig voor opmerkingen en ideeën.”

Binnen elke groep is elk experiment door drie subgroepjes uitgevoerd. Zoals te zien, liggen per experiment de resultaten van de subgroepjes redelijk bij elkaar. De waarden voor de drie verschillende experimenten verschillen aanzienlijk. Wat zegt dit over de metingen? Met behulp van statistiek leren studenten hier een uitspraak over te doen. Resultaten waarvan de verwachte spreidingen overlappen, kunnen over dezelfde grootheid gaan. Metingen die verder uit elkaar liggen moet je nog eens grondig tegen het licht houden.

Wat zeggen de resultaten nog meer? De nauwkeurigheid van de trekproef (trek) blijkt hoger dan die van de drukmeting (compliance) en van de meting met behulp van een drukgolf (golf). “Best een teleurstellend resultaat”, aldus Bovendeerd, “want dit heeft consequenties voor de praktijk. Je kunt niet aan een bloedvat in een patiënt trekken. Meten van drukgolven bij een patiënt kan wel. Voor het onderzoeken van vaatwanden moet je dus genoeg nemen met een onnauwkeuriger meetmethode. Gelukkig heb je daarvoor in de kliniek wel nauwkeuriger meetapparatuur dan de stopwatch en rolmaat in dit experiment.”

Het werken in een groep en de verschillen in meetresultaten geven aanleiding tot nog een ander belangrijk onderdeel van de casus: het geven en ontvangen van feedback. Tijdens een zogenaamde *peer review* stellen de groepsleden elkaars inbreng en resultaten ter discussie. Wat ging goed, wat kon beter, waar komen vreemde resultaten vandaan? “Als onderzoeker heb je een open houding nodig voor opmerkingen en ideeën”, licht Bovendeerd toe. “We laten studenten er daarom zoveel mogelijk mee oefenen.”

### Veelzijdige wiskunde

“Sommige studenten weten al iets over kansrekening en statistiek, maar de meeste hebben daar op school niet veel over gehad”, vertelt Rijpkema. “We geven daarom vóór de casus een korte inleiding. De omschakeling van theorie naar praktijk blijkt het moeilijkst, ook voor studenten met voorkennis.”

Het leuke van de casus is dat er naast vakinhoudelijke kennis over bloedvaten heel wat kanten van de wiskunde aan bod komen. Studenten maken een eerste, eenvoudige beschrijving van een vaatwand (modelvorming), verwerken meetdata met statistische software, beoordelen de significantie van meetresultaten, trekken conclusies over de nauwkeurigheid van meetmethodes, vergelijken de fouten die ze via foutenvoortplanting uitrekenen met de standaardfout uit het statistiekpakket en geven elkaar feedback met behulp van inhoudelijke argumenten. Het illustreert de veelzijdigheid van wiskunde en de toegevoegde waarde die het vak heeft voor de medische beroepspraktijk.