

Een reis om de wereld in 12 vragen

De wiskundeopdracht van het project 'Waar ben ik?' laat zien dat je prima kunt rekenen aan de afstand tussen twee plaatsen op de wereldbol.

Deze opdracht is geschreven voor leerlingen van 4 HAVO met een NG- en NT-profiel. Tijdens het project hadden de leerlingen 3 tot 4 uur nodig voor de onderstaande opdrachten. Voor het uitvoeren van de opdracht zijn een wereldbol en een meetlint of een stukje touw nodig.

1. De coördinaten van een punt op de aardbol

De positie van een plaats op aarde wordt door twee getallen bepaald: het aantal **lengtegraden** L en het aantal **breedtegraden** B . L varieert van 0 tot 180 graden oosterlengte en van 0 tot 180 graden westerlengte. B varieert van 0 tot 90 graden noorderbreedte en van 0 tot 90 graden zuiderbreedte. Geografische coördinaten van plaatsen zijn te vinden via de webpagina www.geografie.startpagina.nl, onder het kopje plaatsbepaling. De link 'plaatsen met coördinaten' brengt je op de pagina <http://www.astro.com/cgi/aq.cgi?&lang=e>.

Voor plaatsen binnen Nederland is

<http://www.ariesastro.nl/varia/plaatsen/coordinaten.asp>

een bruikbare pagina. Beide pagina's zijn weliswaar van astrologische organisaties, maar voor ons doel zijn ze uitstekend bruikbaar.

Opdracht 1

Zoek voor jouw woonplaats L en B op. Benader L en B in twee decimalen nauwkeurig. Bedenk dat op een kaart in een atlas graden in **minuten** worden verdeeld. Hierbij is 1 graad gelijk aan 60 minuten, dus 15 minuten = 0,25 graden, enz. Zoek ook voor Amsterdam, Jebba (Nigeria) en Irkutsk (Rusland) de waarden van L en B op.

Wanneer we de aardbol in een ruimtelijk assenstelsel leggen waarbij de evenaar in het Oxy-vlak ligt en de noord- en zuidpool op de z -as liggen, dan heeft elke plaats op aarde drie coördinaten:

$$x = R \cos(B) \cos(L)$$

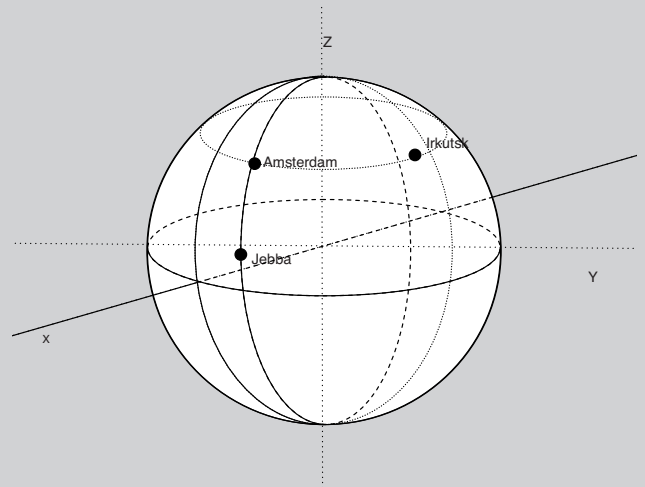
$$y = R \cos(B) \sin(L)$$

$$z = R \sin(B)$$

Zie de wereldbol.

Hierin is R de straal van de aarde. Neem hiervoor $R = 6378$ km.

Verder spreken we af dat L wordt uitgedrukt in graden oosterlengte, zodat bijvoorbeeld 50 graden westerlengte L de waarde -50 geeft. B wordt uitgedrukt in graden noorderbreedte, zodat bijvoorbeeld 20 graden zuiderbreedte B de waarde -20 geeft. Let erop dat je rekenmachine is ingesteld op graden i.p.v. radialen.



Opdracht 2

Bereken voor jouw woonplaats de drie coördinaten in twee decimalen nauwkeurig. Doe hetzelfde voor Amsterdam, Jebba en Irkutsk.

2. De afstand tussen twee punten langs een breedtecirkel

Alle punten met een gelijk aantal breedtegraden liggen op een **breedtecirkel**. De straal van de breedtecirkel bij B breedtegraden is $\text{straal} = R \cos(B)$

Opdracht 3

Toon deze formule aan. Maak daarbij een duidelijke tekening.

Wanneer twee plaatsen met lengtes L_1 resp. L_2 ($L_2 > L_1$) op dezelfde breedtecirkel liggen, dan is hun afstand langs de breedtecirkel:

$$\text{afstand} = (L_2 - L_1) / 360 \cdot 2 \pi R \cos(B)$$

Opdracht 4

Toon deze formule aan. Maak weer een duidelijke tekening.

Is in deze formule $L_2 - L_1 > 180$ graden, vervang in de formule dan $L_2 - L_1$ door $360 - (L_2 - L_1)$.

Opdracht 5

Leg m.b.v. je tekening van de vorige opdracht uit wat hiervan de reden is.

Opdracht 6

Amsterdam en Irkutsk liggen ongeveer op dezelfde breedtecirkel. Bereken de afstand tussen deze twee plaatsen langs de breedtecirkel. Geef je antwoord in km en rond af op drie decimalen.

Opdracht 7

Amsterdam en Jebba liggen ongeveer op dezelfde **meridiaan (lengtecirkel)**. Bereken voor deze twee plaatsen de afstand in km langs de meridiaan.

3. De afstand tussen twee punten langs een grootcirkel

Opdracht 8

Laat met behulp van de globe en het meetlint zien dat er een kleinere afstand is tussen Amsterdam en Irkutsk dan de afstand die je in opdracht 6 gevonden hebt. Schrijf je uitleg op.

Opdracht 9

Laat met behulp van de globe en het meetlint zien dat er geen kleinere afstand is tussen Amsterdam en Jebba dan de afstand die je in opdracht 7 gevonden hebt. Schrijf je uitleg op.

De afstanden die je in opdracht 8 en 9 gemeten hebt hebben te maken met **grootcirkels** (ook wel grote cirkels geheten). Een **grootcirkel** over een bol is een cirkel met als middelpunt het middelpunt van de bol. Alle meridianen zijn grootcirkels. De breedtecirkels zijn in het algemeen geen grootcirkels.

Opdracht 10

Slechts één breedtecirkel is een grootcirkel. Welke breedtecirkel is dat?

Door twee willekeurige plaatsen op de bol - die niet recht tegenover elkaar liggen - gaat precies één grootcirkel.

Opdracht 11

Leg uit waarom dit zo is.

De kortste afstand tussen twee plaatsen op de bol is de afstand langs de grootcirkel. De berekening van deze afstand gaat als volgt. Noem de plaatsen A en B. De coördinaten van A zijn (x_A, y_A, z_A) en de coördinaten van B zijn (x_B, y_B, z_B) . M is het middelpunt van de bol. Noem hoek AMB: a . Nu geldt de volgende formule:

$$\cos(a) = \frac{x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B}{R^2}$$

De afstand tussen A en B langs de grootcirkel wordt nu als volgt berekend:

$$\text{afstand} = \frac{a}{360} \cdot 2\pi R$$

Opdracht 12

Bereken de afstand tussen Amsterdam en Irkutsk langs de grootcirkel. Geef je antwoord in km en rond af op drie decimalen. Vergelijk je antwoord met dat van opdracht 6. Hoe groot is het verschil in **meters** tussen beide afstanden?