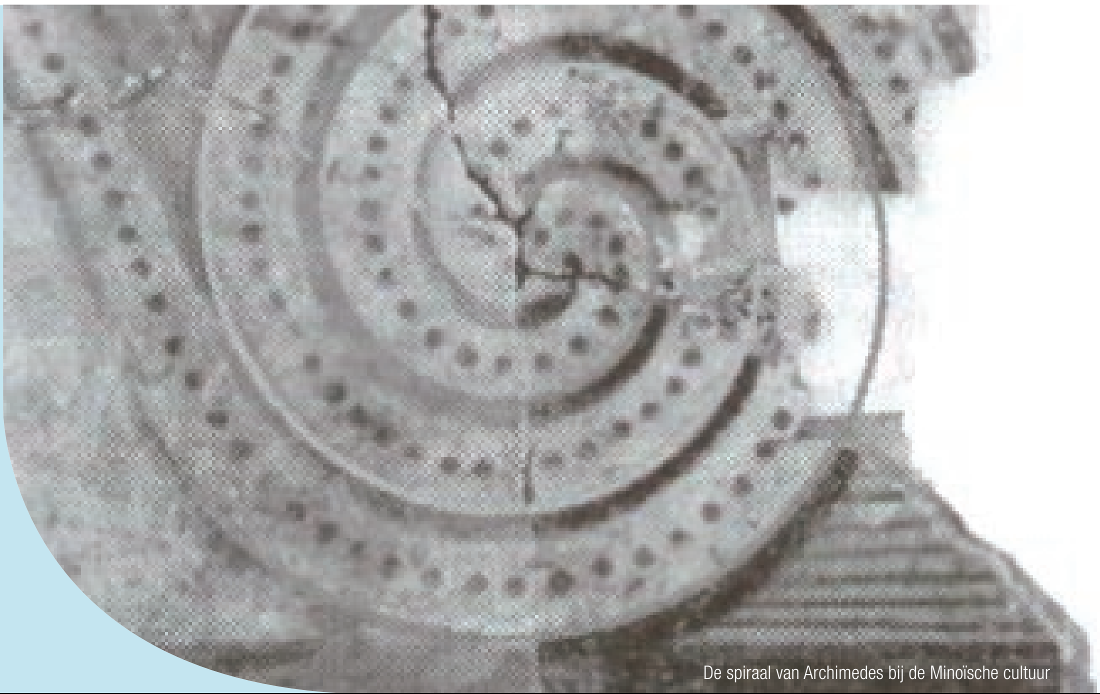
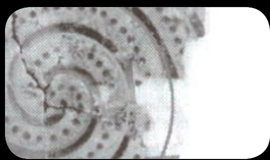
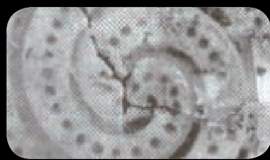


De spiraal van Archimedes bij de Minoïsche cultuur





De spiraal van Archimedes - van muurschildering tot chip

Begin dit jaar berichtte het NRC over een opmerkelijke vondst op het Griekse eiland Santorini. Muurschilderingen uit ongeveer 1650 v. Chr. tonen aan dat de Minoïsche cultuur zijn tijd ver vooruit was op het vlak van de praktische meetkunde. Het onderwerp van de schilderingen, de spiraal van Archimedes, is ook vandaag nog actueel. De volgende wiskundeopdracht voor leerlingen van 5/6 vwo gaat over spiralen, toen en nu. De opdracht legt een link tussen de Griekse oudheid en hedendaagse technologie en introduceert het gebruik van poolcoördinaten. Voor gebruik in de klas zijn het artikel en de opdrachten in een handzame vorm te downloaden van www.jet-net.nl.

Minoïers hun tijd ver vooruit

Onder de kop Minos-cultuur kende spiraal Archimedes berichtte het NRC (NRC, donderdag 2 maart 2006) over muurschilderingen die gevonden zijn op het Griekse eiland Thera (nu Santorini). De muurschilderingen dateren uit ongeveer 1650 v. Chr. en laten een aantal nauwkeurig geconstrueerde meetkundige figuren zien, waaronder de zogenaamde spiraal van Archimedes.

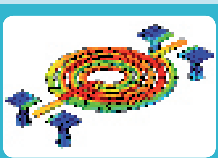
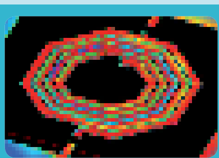
De punten in de muurschildering geven een aanwijzing hoe de spiraal vermoedelijk is geconstrueerd, namelijk met behulp van een aantal concentrische cirkels en met vanuit het centrum lopende halfrechten (dit zijn delen van rechten vergelijkbaar met een halfoneindig interval op de getallenrechte, zoals *[0, ➛⟩)*.

De vondst is opmerkelijk. De spiraal van Archimedes is niet zo'n eenvoudige figuur en je verwacht daarom niet dat de kromme al zo vroeg zou voorkomen. Het wijst erop dat de Minoïsche cultuur over behoorlijk wat praktische meetkundige kennis beschikte, al meer dan duizend jaar voor de bloei van de meetkunde bij de Grieken.

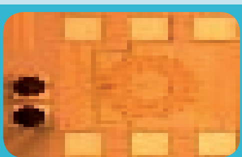
Spiralen actueler dan ooit

Nog opmerkelijker is, dat er een relatie bestaat met het huidige elektronische tijdperk. Spiralen worden tegenwoordig, natuurlijk met veel kleinere afmetingen, veel gebruikt in geïntegreerde schakelingen, ofwel chips.
Deze spiralen, gewikkelde metaalsporen in een laag silicium, vertonen gedrag dat vergelijkbaar is met traditionele spoelen. Vandaar de Engelse term die hiervoor wordt gebruikt: `integrated inductor' ofwel geïntegreerde spoel. Door deze rechtstreeks in te bedden in het silicium, wordt veel ruimte bespaard in moderne elektronische schakelingen. Een van de grootste problemen is nu om de vorm van de spiraal te vertalen naar eigenschappen van de spoel. Dit gebeurt door middel van zeer geavanceerde computersoftware, die de zogenaamde Maxwell vergelijkingen nauwkeurig oplost (en waarvoor ook weer veel leuke, geavanceerde wiskunde nodig is).

Voorbeelden van in chips geïntegreerde spiralen vind je in de bijgevoegde figuren. De kleurtjes in de eerste twee plaatjes geven de grootte van de berekende elektromagnetische velden weer die berekend zijn door de software.

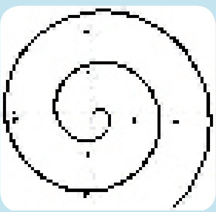
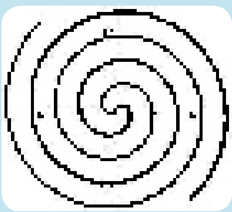
Softwaresimulaties van in chips geïntegreerde spiralen.




Softwaresimulaties van in chips geïntegreerde spiralen.

Handige wiskunde voor het beschrijven van spiralen

De spiraal van Archimedes is een kromme in het vlak. Als je deze kromme beter wilt begrijpen, is het handig poolcoördinaten te gebruiken in plaats van de gewone *x,y*-coördinaten.

In de linkerfiguur een `rechtsdraaiende' spiraal. Rechts twee met elkaar verbonden spiralen.

Met *x,y*-coördinaten heb je al de nodige ervaring als het gaat om krommen. Kijk maar:

De grafiek van een functie $y = f(x)$ is een voorbeeld van een kromme in het vlak. De eenvoudigste voorbeelden daarvan zijn de rechte lijnen, beschreven door het voorschrift $y = ax + b$.

De meeste vergelijkingen in x en y beschrijven krommen in het vlak. Denk bijvoorbeeld aan de vergelijking $x^2 + y2 = 1$ die een cirkel met middelpunt *(0,0) en straal 1* beschrijft.
De vergelijking $y = f(x)$ hierboven, is een bijzonder geval van een vergelijking in *x en y*.

We maken hier gebruik van gewone *x,y-coördinaten*. Sommige krommen, zoals spiralen, laten zich makkelijker `vangen' met andere coördinaten, bijvoorbeeld poolcoördinaten r en φ.

Opdrachten over spiralen

Zoek eerst op wat poolcoördinaten zijn.

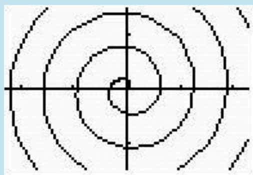
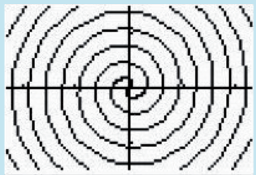
1. De cirkel met middelpunt *(0,0)* en straal *2* bestaat uit alle punten die afstand *2* hebben tot de oorsprong. Hoe beschrijf je deze kromme met poolcoördinaten?

2. De vergelijking $y = ax + b$ in gewone *x,y*-coördinaten is een lineaire betrekking tussen x en y. In poolcoördinaten kun je je ook afvragen welke kromme beschreven wordt door een lineaire betrekking in r en φ. Een voorbeeld is r =constant. Wat voor figuur stelt dit voor?

3. De (standaard) spiraal van Archimedes heeft de vergelijking $r = \varphi$, dus ook lineair, maar nu in r en φ. Vanuit het standpunt van poolcoördinaten een eenvoudige kromme. Beschrijf zo goed mogelijk in woorden de spiraal van Archimedes: aan welke voorwaarde moet een punt uit het vlak voldoen om op de spiraal te liggen? Maak een ruwe schets van de spiraal aan de hand van je beschrijving.

4. Wat is het effect op de kromme als je de vergelijking verandert in $r = 2\varphi$ of $r = -\varphi$?

5. En als je de vergelijking verandert in $r = \varphi + \pi$? Of $r = \varphi + \pi/2$? Op de Minoïsche muurschildering staan twee spiralen (waarvan één vanaf zeker punt afwijkt van de spiraalvorm). Je kunt ze beschrijven met vergelijkingen van de vorm $r = a\varphi + b$. Wat is het teken van a voor de spiralen?
Je kunt ook de grafische rekenmachine gebruiken om spiralen te onderzoeken. Probeer maar eens of je de onderstaande figuren kunt reconstrueren.

6. In het artikel wordt een manier gesuggereerd waarop de vroegere bewoners van Minos de spiraal van Archimedes geconstrueerd zouden hebben. Deze gaat uit van een aantal halfrechten en cirkels.
De halfrechten kun je beschrijven met een vergelijking van de vorm φ = constant.
Neem als halfrechten bijvoorbeeld de twaalf halfrechten met vergelijking $\ell_0 : \varphi = 0$, $\ell_1 : \varphi = \pi/6$, $\ell_2 : \varphi = \pi/3, \ldots, \ell_{11} : \varphi = 11\pi/6$.
Teken deze halfrechten en teken in dezelfde figuur cirkels met stralen (bij benadering) $\pi/6, 2\pi/6, \ldots, 11\pi/6$. Door welke punten gaat de spiraal van Archimedes? Hoe zou je de spiraal nauwkeuriger kunnen construeren?

Dit artikel is te downloaden via www.jet-net.nl