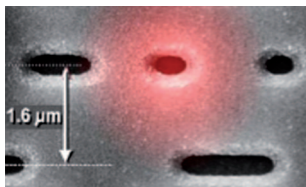


Maak je eigen cd

Hoeveel uur per dag besteed je aan wiskunde? Misschien is dat meer dan je denkt. Als je een dvd kijkt of een game speelt, zit je eigenlijk een flinke berg wiskunde te doen. Hetzelfde geldt als je muziek luistert op je iPod of mp3. In deze opdracht kom je iets te weten over de rol van wiskunde bij cd's.

Deze opdracht is gebaseerd op het lesmateriaal bij de dvd-demonstrator van Philips. De daarbij behorende bladen 'binair' en 'pariteit_tabel' worden ook bij deze opdracht gebruikt. Deze bladen vind je op www.jet-net.nl onder 'kennisuitwisseling/lesmateriaal/dvd-demonstrator/neem een voorproefje'.

De informatie op een cd, iPod of een andere digitale informatiedrager bestaat louter en alleen uit nullen en enen: muziek, een game, een film, foto's ..., alle informatie wordt eerst gedigitaliseerd (in nullen en enen omgezet). Op een cd worden die nullen en enen in de vorm van putjes vastgelegd. Sterk uitgevergroot ziet dat er als volgt uit:



Afbeelding 1: Vergroting van de oppervlakte van een cd

In je Xbox, pc of Wii worden die putjes in de disk met een laser 'gelezen' en weer terugvertaald naar iets dat je kunt horen of zien. Dat 'lezen' gaat niet altijd goed. Als je een cd goed bekijkt, zie je altijd wel krasjes, stofjes of vingerafdrukken zitten. De kans dat er bij het lezen een fout wordt gemaakt is dus levensgroot. Toch merk je daar niets van als je zit te gamen of een film bekijkt. Hoe kan dat?

In deze opdracht maak je kennis met de Hamming-code. Dit is een wiskundige truc die fouten op een cd opspoorst en verbetert. We kijken eerst hoe hij werkt, daarna mag je er zelf mee aan de slag.

Hamming-code

Stel, je speelt in een bandje en je wilt een cd opnemen met jullie favoriete nummers. Samen duiken jullie de studio in. Na de opname wordt de muziek gedigitaliseerd. Die vette bas en dat snelle loopje worden vertaald in een enorme reeks nullen en enen (bits). Een piepklein stukje muziek ziet er dan bijvoorbeeld zo uit:

1100011011011111

Nu kun je deze reeks precies zo op een cd wegschrijven, maar de kans dat je hem straks weer zonder fouten kunt afspelen, is dan maar klein. Als je op een slimme manier extra bits toevoegt, kun je bij het afspelen foute bits herkennen en corrigeren. Hiervoor gebruiken we de Hamming-code.

Voor de Hamming-code delen we ons digitale muziekfragment eerst op in groepjes van vier bits. Dit zijn de informatiebits b_0 , b_1 , b_2 , b_3 .

Vervolgens voegen we aan elk groepje drie extra bits toe, de zogenaamde pariteitbits p_1 , p_2 , p_3 :

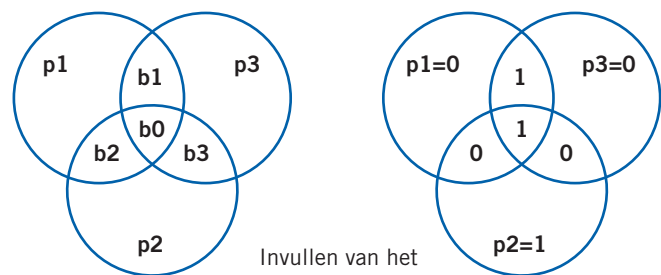
1100* 0110*** 1101*** 1111*****

Je muziekfragment bestaat nu dus uit vier getallen van zeven bits b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , p_1 , p_2 , p_3 . Zo'n getal noemen we een codewoord.

Om de waarde van de pariteitbits te bepalen gebruiken we drie cirkels en de volgende regel:

In elke cirkel moet een even aantal enen staan.

We vullen de cirkels als volgt in:



Invullen van het eerste groepje levert:

Het eerste codewoord in ons voorbeeld is dus: 1100010. Dit codewoord schrijven we weg op de cd.

► Lees verder op volgende pagina.

Oefening 1

Bepaal de pariteitbits voor de andere drie groepjes bits in ons voorbeeld en schrijf alle codewoorden van het muziekfragment hier op:

1 1 0 0 0 1 0 -----

Oefening 2

Controleer of 1010010 en 0001111 geldige codewoorden zijn (met andere woorden: kloppen ze wel of niet met de cirkelregel). Omcirkel de goede antwoorden:

1010010 is een geldig codewoord / is geen geldig codewoord

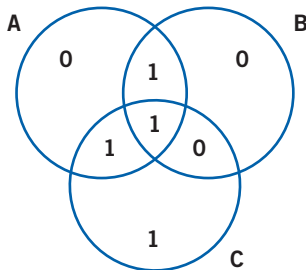
0001111 is een geldig codewoord / is geen geldig codewoord

Als we de cd willen afspelen zien we dat die vuil is geworden. Bij het uitlezen van de putjes zitten er wat klein stofjes in de weg. We krijgen de volgende codewoorden:

1110010 0110011 1001001 1111101

Met de drie cirkels en de regel 'in elke cirkel een even aantal enen', controleren we of er bij het lezen een fout is opgetreden.

We vullen het eerste codewoord in de cirkels in.



We zien nu het volgende:

- Cirkel B voldoet aan de regel dat er een even aantal enen in moet staan. Deze cirkel bevat dus geen fout.
- Cirkel A en cirkel C bevatten allebei een oneven aantal enen. De fout moet dus staan in het segment dat alleen deze twee cirkels gemeenschappelijk hebben. Hier staat de informatiebit b2. De 1 die hier staat moet dus worden veranderd in een 0.

Oefening 3

Controleer op dezelfde manier de andere codewoorden uit het voorbeeld en corrigeer ze als dat nodig is. Welke bits waren fout? Omcirkel ze in de codewoorden hieronder (in elk codewoord is maximaal 1 bit fout).

1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1

De codewoorden die we in ons voorbeeld gebruiken bestaan uit zeven bits: vier informatiebits en drie pariteitbits. We noemen dit een [7, 4, 3]-code.

Interleaving

Met deze Hamming-code kun je maximaal één fout in een codewoord opsporen en corrigeren. Als er een krasje of vuiltje op een cd zit, is de kans natuurlijk groot dat een hele rij bits achter elkaar verkeerd wordt uitgelezen. Daarom is er een techniek ontwikkeld waarbij het risico op fouten letterlijk wordt gespreid. Bij deze techniek worden de codewoorden eerst 'opgeknipt' in losse onderdelen en bij het wegschrijven over een groter gebied op de disc verspreid. Deze techniek heet interleaving. Het komt erop neer dat van een set codewoorden eerst alle eerste bits achter elkaar worden weggeschreven, dan alle tweede bits, etc.

De codewoorden:

1011010 0111000 0010110 1110100

worden dan als volgt weggeschreven op de cd:

1001 0101 1011 1100 0011 1010 0000

Oefening 4

Schrijf de codewoorden uit oefening 1 op met gebruik van interleaving.

Oefening 5

De volgende reeks bits is met interleaving op een cd vastgelegd. Schrijf op uit welke codewoorden deze reeks is gemaakt.

1010 1110 1000 1001 1100 1010 1101

Opdracht 'Maak je eigen cd'

Je hebt wat geoefend met de Hamming-code en interleaving. Nu gaan we serieus aan de slag.

In deze opdracht ga je zelf een cd 'opnemen' die daarna door een medeleerling wordt 'afgespeeld'.

Kijk voor de werkbladen 'binair' en 'pariteit_tabel' op www.jet-net.nl onder 'kennisuitwisseling/lesmateriaal/dvd-demonstrator/neem een voorproefje'

Opnemen (noteer je gegevens op werkblad 1)

- 1 Bedenk een (geheime) boodschap of woord van 5 letters.
- 2 Digitaliseer je boodschap met behulp van het werkblad 'binair'.
- 3 Deel je boodschap nu op in 10 groepjes van 4 bits.
- 4 Voeg aan elk groepje 3 pariteitbits toe; gebruik hiervoor de Hamming-code en het werkblad 'pariteit_tabel'.
- 5 Zet met interleaving alle eerste bits achter elkaar, dan alle tweede bits, enzovoort. Totaal heb je 70 bits.
- 6 Schrijf de bits in de volgorde die je nu gekregen hebt op de cd (werkblad 3). Begin bij START.
LET OP: Zoals je ziet, zit er een grote kras op de cd. Vervang op de plaats van de kras jouw informatie (0 of 1) door een 0.
- 7 Knip je cd uit en geef hem aan een medeleerling die jouw boodschap mag gaan afspelen. Speel intussen zelf een cd van een medeleerling af.

Afspelen (noteer je gegevens op werkblad 2)

- 1 Reconstrueer de codewoorden die met interleaving op de cd zijn weggeschreven. Als het goed is heb je nu 10 codewoorden met een lengte van 7 bits.
- 2 Controleer met de Hamming-code of er fouten in de codewoorden zitten en corrigeer ze als dat nodig is. Gebruik hierbij het werkblad 'pariteit_tabel'.
- 3 Verwijder de pariteitbits zodat je 10 groepjes van 4 bits overhoudt.
- 4 Combineer steeds twee groepjes van 4 bits zodat je 5 groepjes van 8 bits overhoudt.
- 5 Zoek op het werkblad 'binair' voor elk groepje de bijbehorende letter op.
- 6 Welke boodschap heb je ontcijferd? Klopt dit met de boodschap die je medeleerling heeft gecodeerd?

Tot slot

Met deze Hamming-code kun je per codewoord één fout herkennen en herstellen. De codes die tegenwoordig gebruikt worden, zijn veel complexer en kosten veel meer rekentijd. Daarom zitten er in je gameapparatuur chips die speciaal zijn ontworpen om razendsnel met één bepaalde code fouten te vinden en te corrigeren. Het principe daarvan is echter gelijk aan wat je in deze les hebt gedaan!

'Maak je eigen cd' Werkblad 1

Opnemen

Schrijf hier je gedigitaliseerde (binaire) boodschap

Eerste letter

Tweede letter

Derde letter

Vierde letter

Vijfde letter

Schrijf hier de codewoorden. In de grijze vakjes komen de pariteitbits.

Cw1 staat voor codewoord1, cw2 staat voor codewoord 2, enzovoort.

Eerste letter

cw1

Tweede letter

cw3

Derde letter

cw5

Vierde letter

cw7

Vijfde letter

cw9

cw2

cw4

cw6

cw8

cw10

Schrijf hier de reeks enen en nullen nadat je interleaving hebt toegepast. Let op de volgorde van de codewoorden. Als het goed is komen de pariteitbits in de grijze vakjes terecht.

cw1 cw2 cw3 cw4 cw5 cw6 cw7 cw8 cw9 cw10

Eerste bits

Tweede bits

Derde bits

Vierde bits

Vijfde bits

Zesde bits

Zevende bits

	cw1	cw2	cw3	cw4	cw5	cw6	cw7	cw8	cw9	cw10

Schrijf nu regel voor regel de bits op je cd (1 cijfer per vakje). Begin bij START.

Vervang op de plaats van de kras je eigen informatie door 0-en.

Je kunt de 0-en en 1-en in de vakjes schrijven, maar je kunt ook de vlakjes met twee kleuren inkleuren. Zet er dan wel bij welke kleur een 1 is en welke kleur een 0.

‘Maak je eigen cd’ Werkblad 2

Afspelen

Schrijf hier de reeks enen en nullen van de cd die je gaat afspelen.
Begin bij START.

	cw1	cw2	cw3	cw4	cw5	cw6	cw7	cw8	cw9	cw10
Eerste bits										
Tweede bits										
Derde bits										
Vierde bits										
Vijfde bits										
Zesde bits										
Zevende bits										

Schrijf hier de gereconstrueerde codewoorden. In de grijze vakjes komen de pariteitbits.

Vervang waar nodig een foute bit na controle met de Hamming-code.

Eerste letter	cw1									cw2				
Tweede letter	cw3									cw4				
Derde letter	cw5									cw6				
Vierde letter	cw7									cw8				
Vijfde letter	cw9									cw10				

Schrijf hier de digitale boodschap

Eerste letter							
Tweede letter							
Derde letter							
Vierde letter							
Vijfde letter							

De boodschap is:

--	--	--	--	--

Klopt dit met de boodschap die je medeleerling heeft gecodeerd?

'Maak je eigen cd' Werkblad 3

